Geometria Obliczeniowa

Diagramy Voronoi

Krzysztof Piecuch
IIC_1

Geometria Obliczeniowa

Część I: Zestaw problemów

Problem 1 (Najbliższa para)

- Jeśli danych jest N punktów na płaszczyźnie, znaleźć dwa punkty, których wzajemna odległość jest najmniejsza.
- Zasadnicze pytanie geometrii obliczeniowej
- Problem kontroli lotów
- Czy konieczne jest badanie każdej pary punktów?

Problem 2 (Wszystkie pary)

- Jeśli danych jest N punktów na płaszczyźnie, znaleźć dla każdego z nich najbliższego sąsiada.
- Relacja nie musi być symetryczna
- 1 punkt może mieć wiele takich sąsiadów
- Pary wzajemne

Zastosowania: ekologia matematyczna, geografia, fizyka bryły sztywnej

Problem 3 (EMST)

- Jeśli danych jest N punktów na płaszczyźnie, stworzyć drzewo o najmniejszej całkowitej długości, którego wierzchołki są danymi punktami
- Drzewo Steinera (problem klasy NP)
- MST zawiera najkrótszą krawędź
- Problem Euklidesowy jest mocno ogr.

Zastosowania: klastrowanie, wyznaczanie wymiaru zbioru punktów, rozpoznawanie wzorca, minimalizacja długości obwodu w układach komputerowych, podstawy do badań nad problemem komiwojażera

Problem 4 (Wypukła otoczka)

- Mając dany zbiór S złożony z N punktów na płaszczyźnie, znaleźć najmniejszy zbiór wypukły zawierający wszystkie punkty zbioru S. Conv(S)
- Kluczowe zagadnienie wielu problemów geometrii obliczeniowej

Zastosowania: rozpoznawanie wzorców, cięcia, rozlokowywanie towarów, statystyka (regresja liniowa, regresja izotoniczna, teoria głosowania, klastrowanie (średnica zbioru punktów)) i wiele wiele innych.

Problem 5 (Triangulacja)

- Jeśli danych jest N punktów na płaszczyźnie połączyć je nie przecinającymi się odcinkami tak, aby każdy obszar wewnątrz wypukłej otoczki był trójkątem.

Zastosowania: metoda elementu skończonego, numeryczna interpolacja danych dwuzmiennych

Problem 6 (Szukanie sąsiada)

- Jeśli danych jest N punktów na płaszczyźnie i jeśli możliwe jest przetwarzanie wstępne, jak szybko znaleźć najbliższego sąsiada nowego danego punktu q.

Zastosowania: problem klasyfikacji, rozpoznawanie mowy, identyfikacja cząstek elementarnych, pobieranie zapisu najlepiej pasującego

Problem 7 (k sąsiadów)

- Jeśli danych jest N punktów na płaszczyźnie i dopuszczalne jest przetwarzanie wstępne, jak szybko znaleźć k punktów najbliższych danemu punktowi q

Zastosowania: interpolacja, wyznaczanie konturu, klasyfikacja

Geometria Obliczeniowa

Część II: Diagramy Voronoi

Diagram Voronoi

- Obszary Dirichleta
- Wielokąty Thiessena
- Komórki Wignera-Seitza
- Wielokąty Sąsiedztwa (Dan Hoey)

Definicja

- Niech dany będzie zbiór S N punktów.
- Wielokątem Voronoi związanym z p_i nazywamy zbiór wszystkich punktów (x, y) takich, że są one bliżej p_i niż jakikolwiek inny punkt w S. V(i).
- Diagramem Voronoi nazywamy sieć wszystkich N wielokątów Voronoi Vor(S)

Analiza struktury diagramu

- Jeśli dane są dwa punkty p_i oraz p_j to zbiór punktów bliższych p_i niż p_j to półpłaszczyzna zawierająca p_i wyznaczona przez prostopadłą prostą dzielącą na pół odcinek $p_i p_j$. Oznaczamy taką półpłaszczyzną przez $H(p_i, p_j)$.

$$V(i) = \bigcap_{i \neq j} H(p_i, p_j)$$

Wielokąt Voronoi

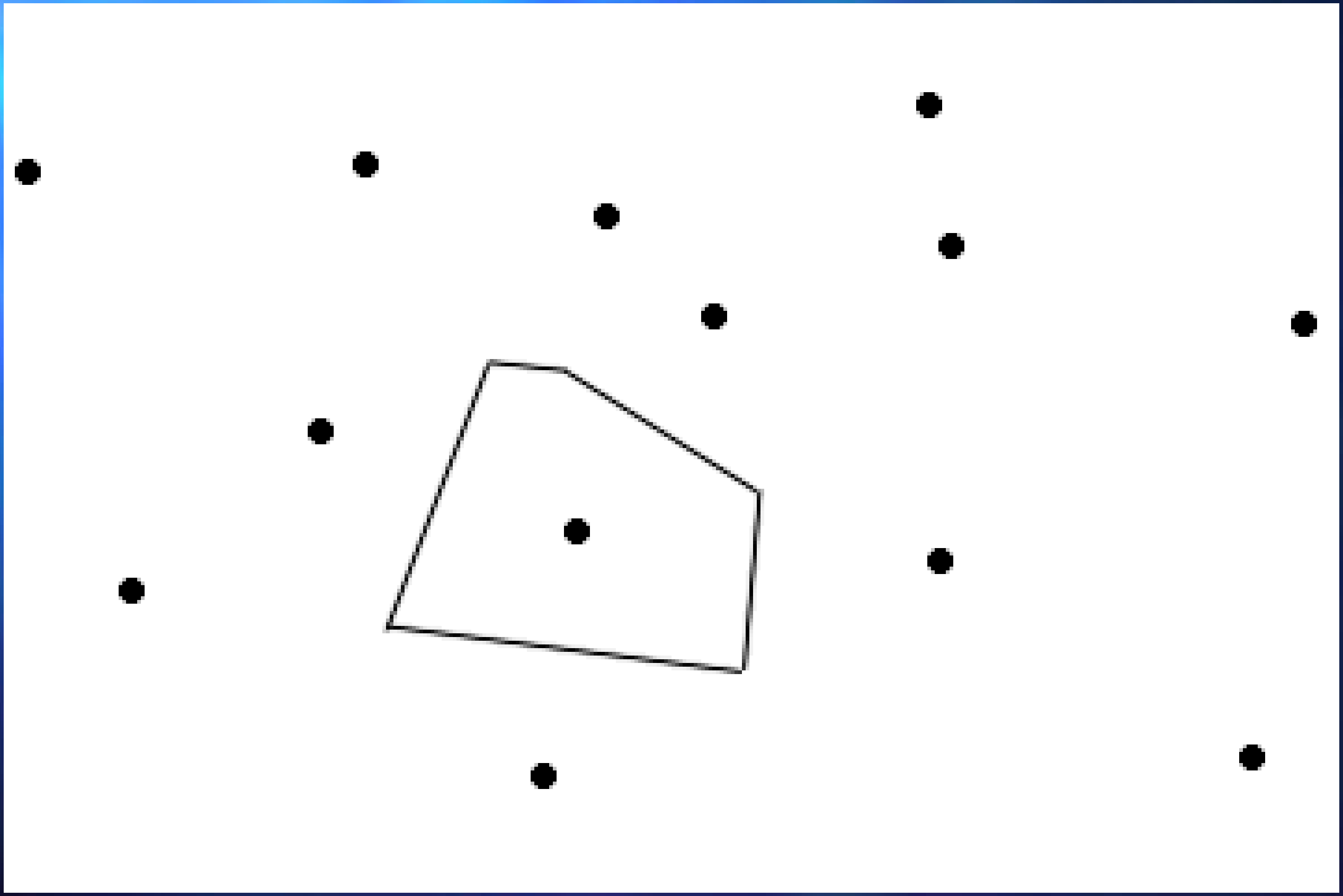
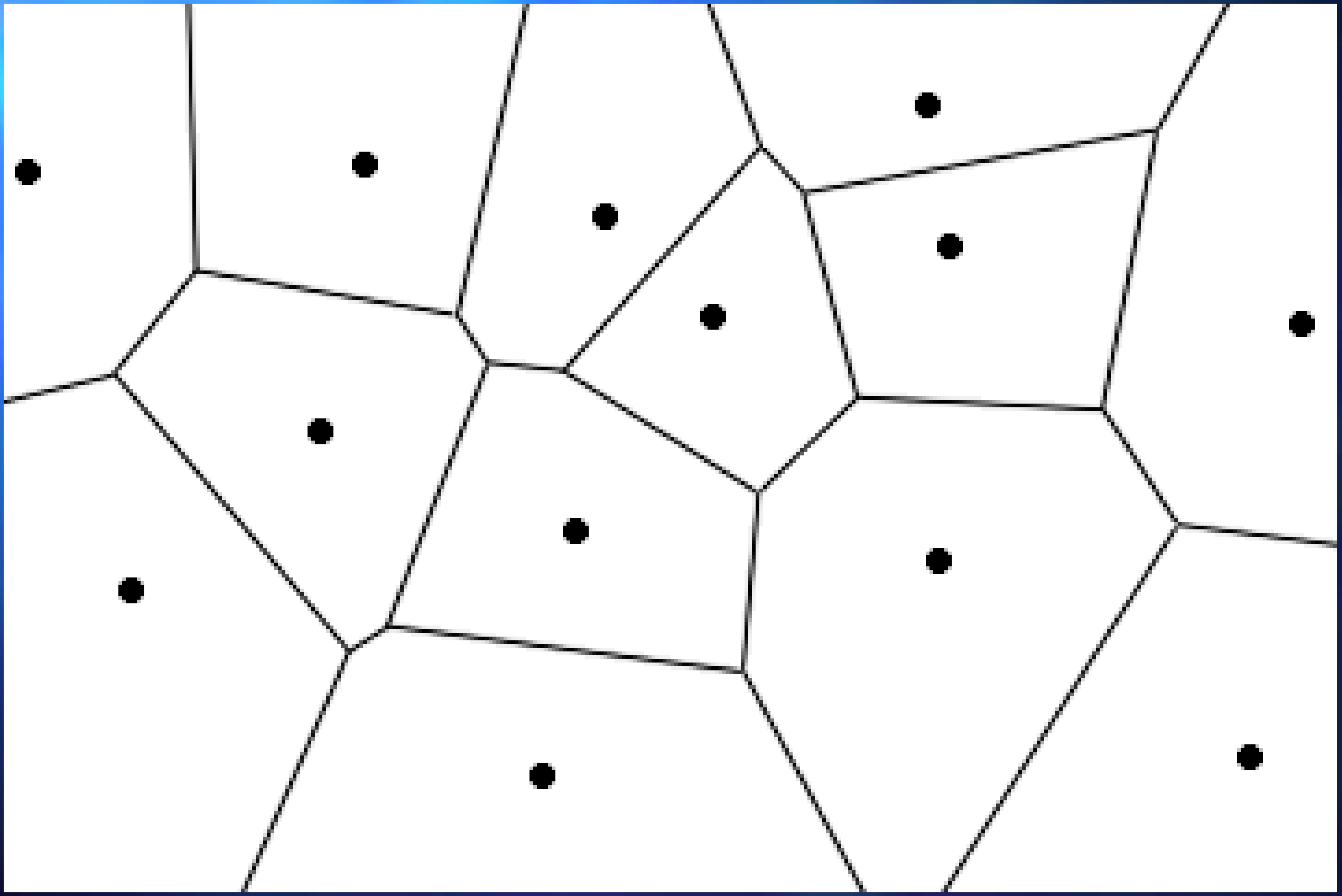


Diagram Voronoi



Geometria Obliczeniowa

Część III: Własności Diagramów Voronoi

Dodatkowe założenie

- Żadne cztery punkty pierwotnego zbioru S nie leżą na obwodzie jednego koła.
- Jeśli założenie to nie jest spełnione, konieczne jest dodawanie do stwierdzeń dowodów twierdzeń długich, choć niewiele wnoszących uzupełnień.

Twierdzenie 1

- Każdy węzeł diagramu Voronoi jest wspólnym przecięciem dokładnie trzech krawędzi diagramu.

Twierdzenie 2

- Dla każdego węzła v diagramu Voronoi zbioru S okrąg C(v) nie zawiera żadnych innych punktów S.

Twierdzenie 3

- Każdy najbliższy sąsiad p_i z S definiuje krawędź wielokąta Voronoi V(i).

Twierdzenie 4

- Wielokąt V(i) jest nieograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy p_i jest punktem na brzegu otoczki wypukłej zbioru S.

Twierdzenie 5

- Prosta dualna diagramu Voronoi jest triangulacją.
- W tej prostej postaci twierdzenie to zawodzi, jeśli pewne podzbiory czterech lub więcej punktów leżą na jednym okręgu. W takim przypadku jednak uzupełnienie triangulacji jest proste.

Twierdzenie 6

- Diagram Voronoi dla N punktów ma co najwyżej 2N-5 węzłów i 3N-6 krawędzi.

Geometria Obliczeniowa

Część IV: Tworzenie Diagramów Voronoi

Tworzenie diagramu Voronoi

- Struktura danych: DCEL
- Czas tworzenia pojedynczego wielokąta wynosi O(N log N).
- Czy na stworzenie całego diagramu potrzebujemy $O(N^2 \log N)$?
- Metoda dziel i rządź

Zastosowania: archeologia, ekologia, leśnictwo, fizyka cząstek elementarnych, badanie konkurujących ze sobą centrów handlowych.

Struktura danych: DCEL

- V_1 – początek, V_2 – koniec krawędzi
- F_1 – nazwa leżąca na lewo F_2 – na prawo od krawędzi.
- P_1 – wskazuje węzeł krawędzi, zawierający pierwszą krawędź znajdującą się za (V_1, V_2) w kier. przeciwnym do ruchu wz.

Szkic algorytmu

- Dzielimy S na dwa podzbiory, S_1 oraz S_2, o mniej więcej równej wielkości.
- Tworzymy rekurencyjnie $Vor(S_1)$ i $Vor(S_2)$.
- Łączymy $Vor(S_1)$ i $Vor(S_2)$, aby uzyskać $Vor(S)$.

Dlaczego ma to w ogóle działać?

- Dlaczego mamy sądzić, że Vor(S_1) oraz Vor(S_2) są powiązane z Vor(S)?
- Jeśli dany jest podział $\{S_1, S_2\}$ zbioru S, niech $\zeta(S_1, S_2)$ oznacza zbiór krawędzi Voronoi wspólnych dla par wielokątów V(i) oraz V(j) diagramu Vor(S) dla p_i należącego do S_1 oraz p_j należącego do S_2.

Dlaczego ma to w ogóle działać?

- $\zeta(S_1, S_2)$ składa się z cykli i łańcuchów rozłącznych krawędzi. Jeśli łańcuch zawiera tylko jedną krawędź, jest to prosta; w przeciwnym razie jego dwie krawędzie skrajne są półprostymi.
- Jeśli S_1 i S_2 są oddzielone liniowo, to $\zeta(S_1, S_2)$ składa się z pojedynczego łańcucha monotonicznego.

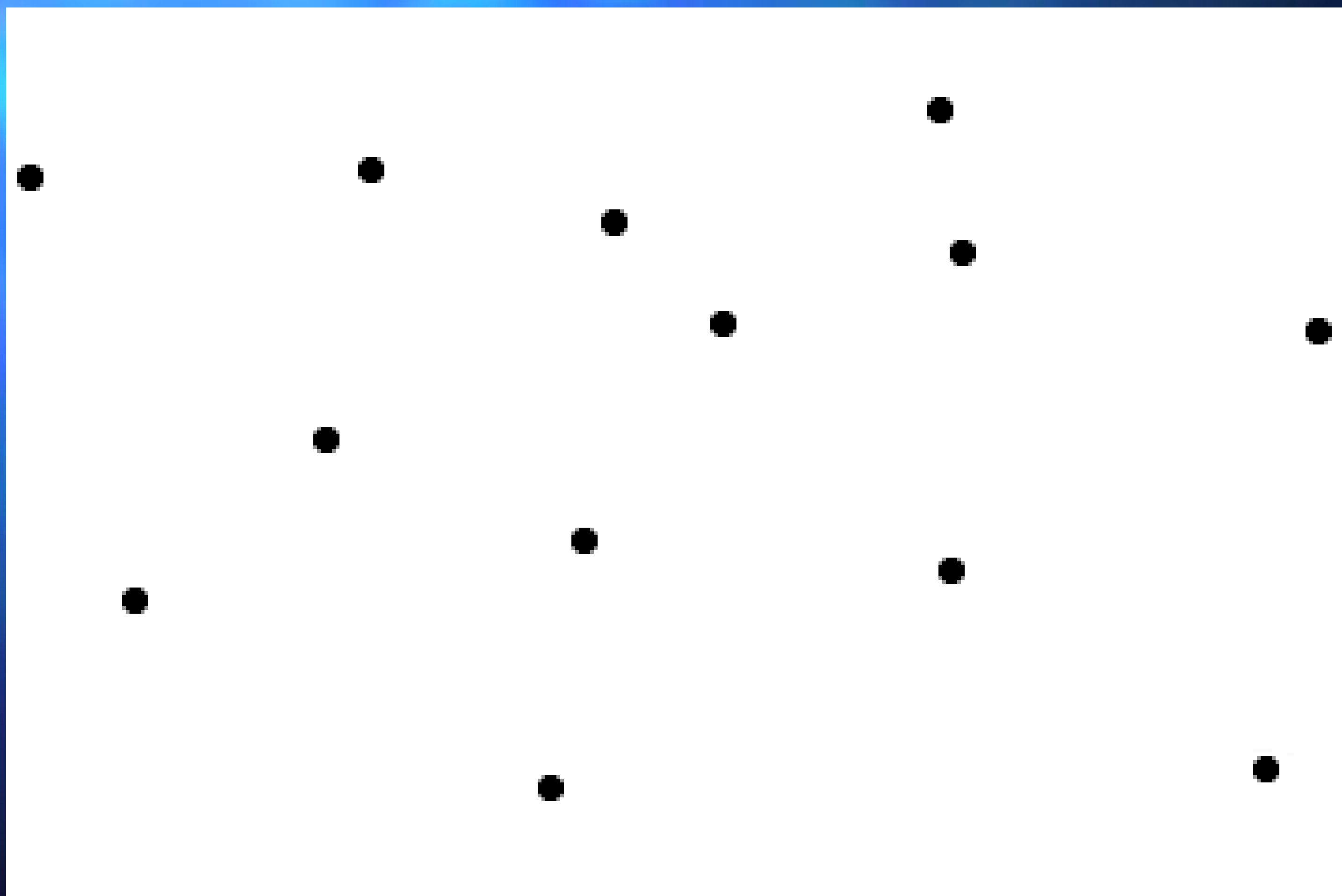
Dlaczego ma to w ogóle działać?

- Niech $\zeta(S_1, S_2)$ dzieli płaszczyznę na część lewą (π_l) i prawą (π_r).
- Jeśli S_1 i S_2 są rozdzielone liniowo pionową prostą tak, że S_1 jest na lewo od S_2, diargam Voronoi Vor(S) jest sumą części wspólnych $Vor(S_1)$ i π_l oraz $Vor(S_2)$ i π_r.

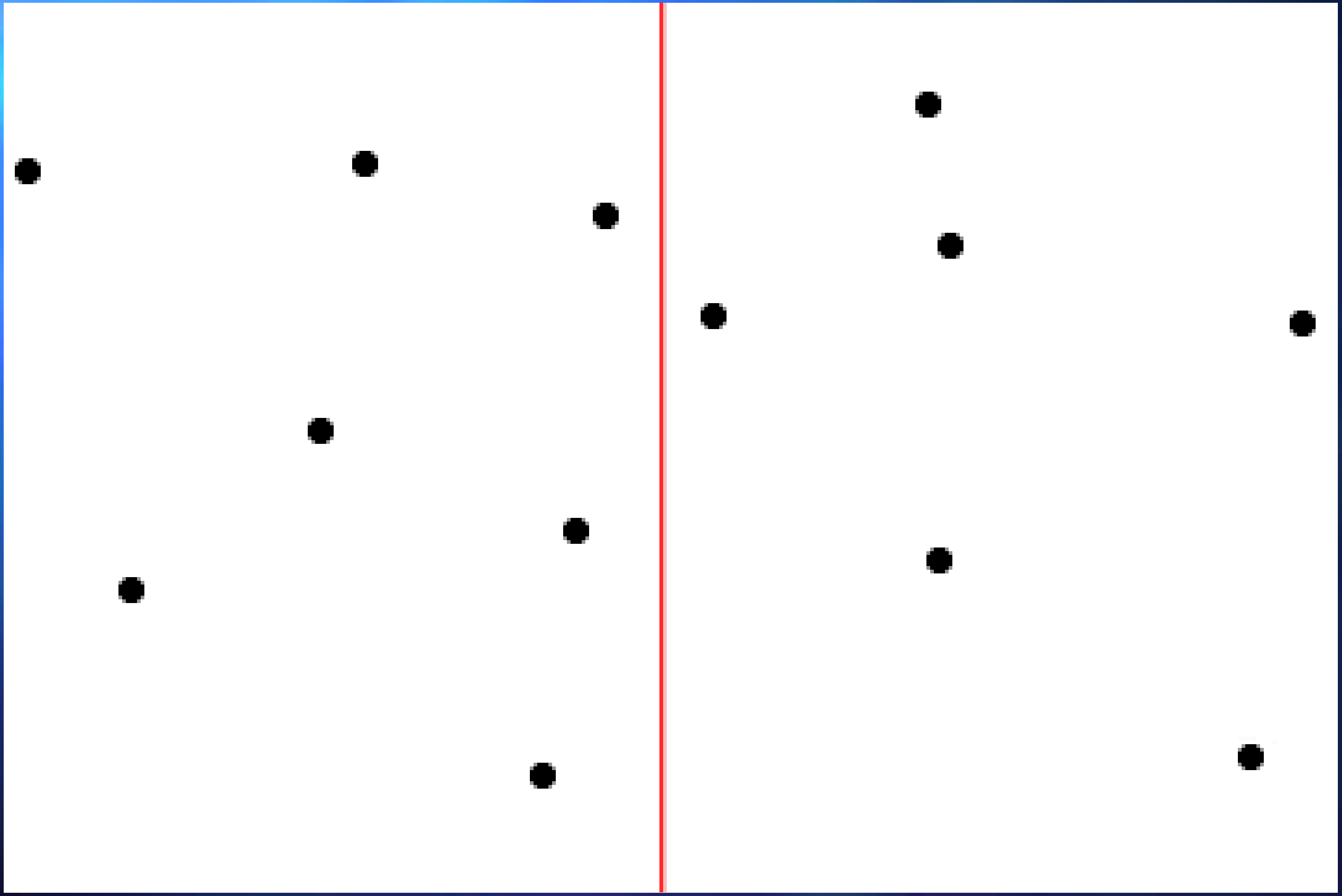
Algorytm właściwy

- Dzielimy S na dwa podzbiory, S_1 i S_2, o mniej więcej równej wielkości, korzystając z mediany współrzędnych x.
- Tworzymy rekurencyjnie $Vor(S_1)$ oraz $Vor(S_2)$
- Tworzymy łańcuch $\zeta(S_1, S_2)$.
- Odrzucamy wszystkie krawędzie $Vor(S_2)$ leżące na lewo od ζ i wszystkie krawędzie z $Vor(S_1)$ leżące na prawo od ζ.

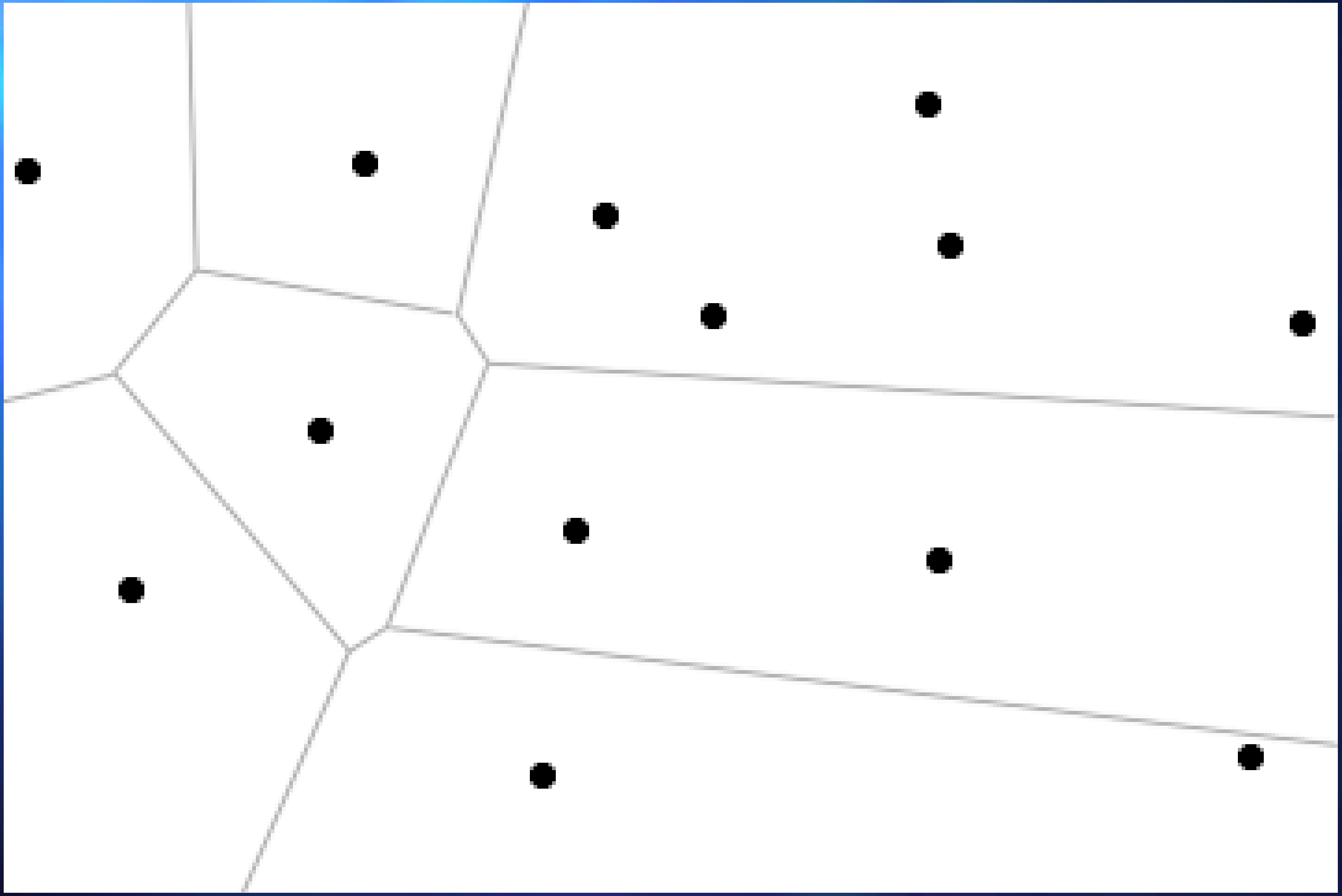
Dla wzrokowców



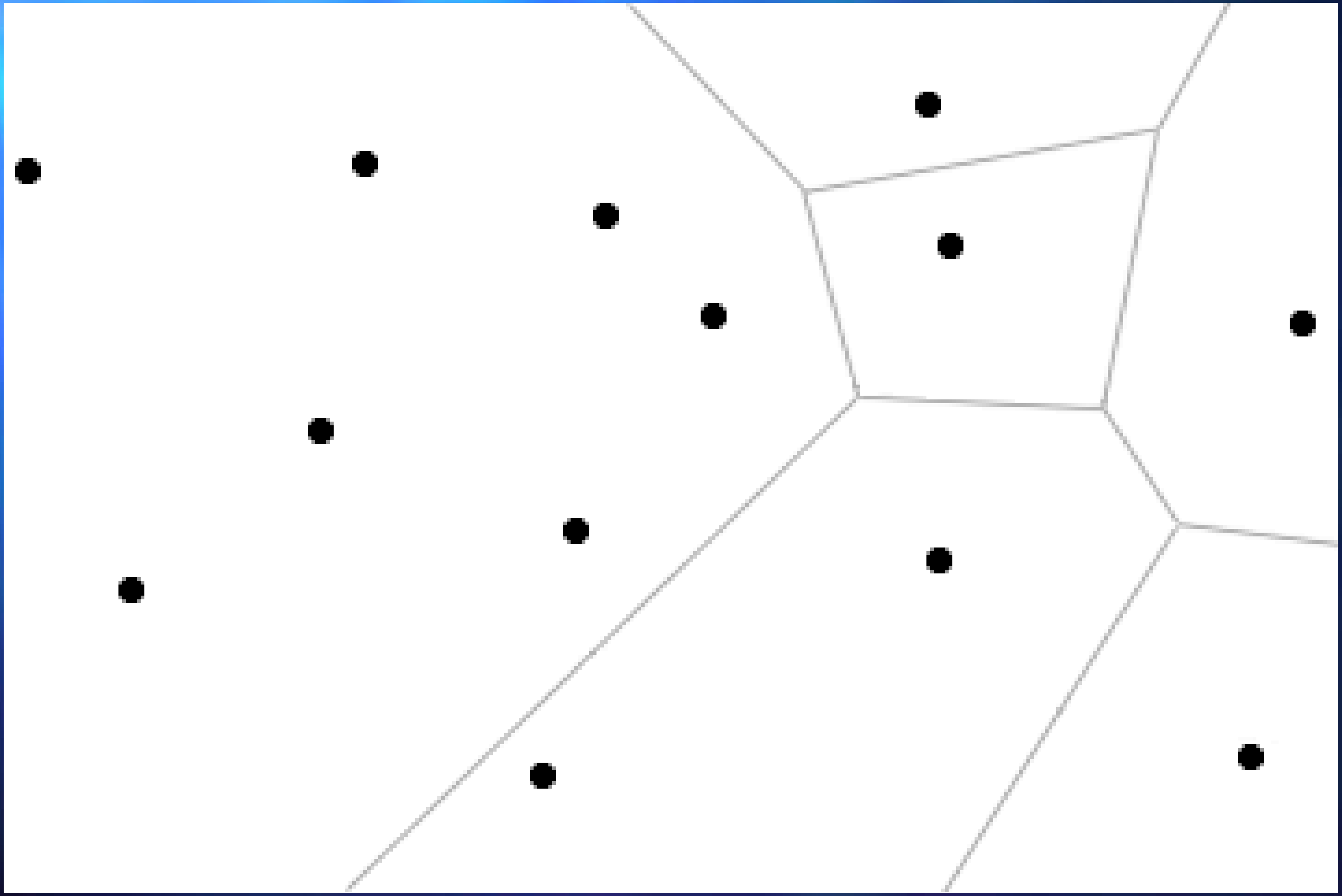
Dla wzrokowców



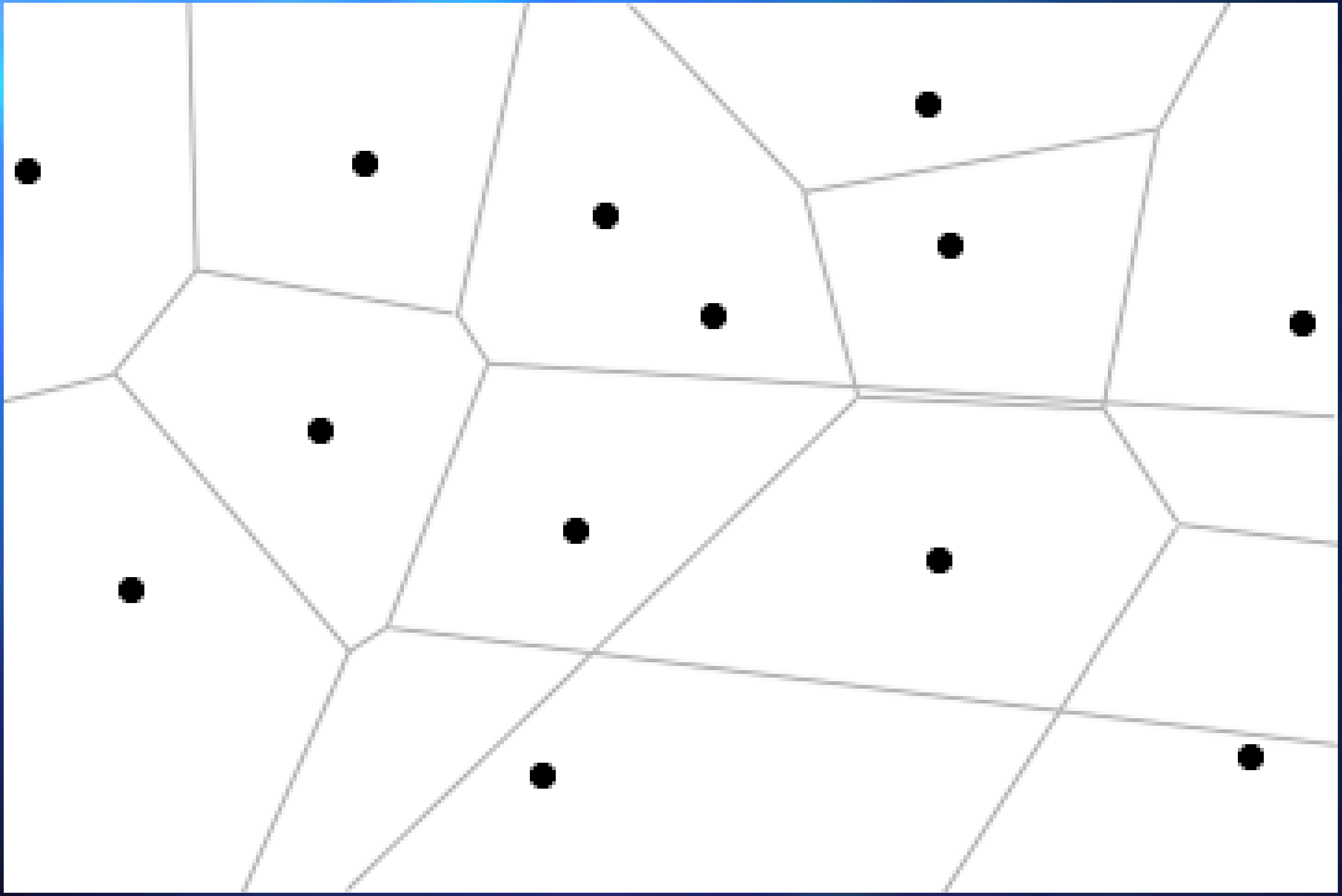
Dla wzrokowców



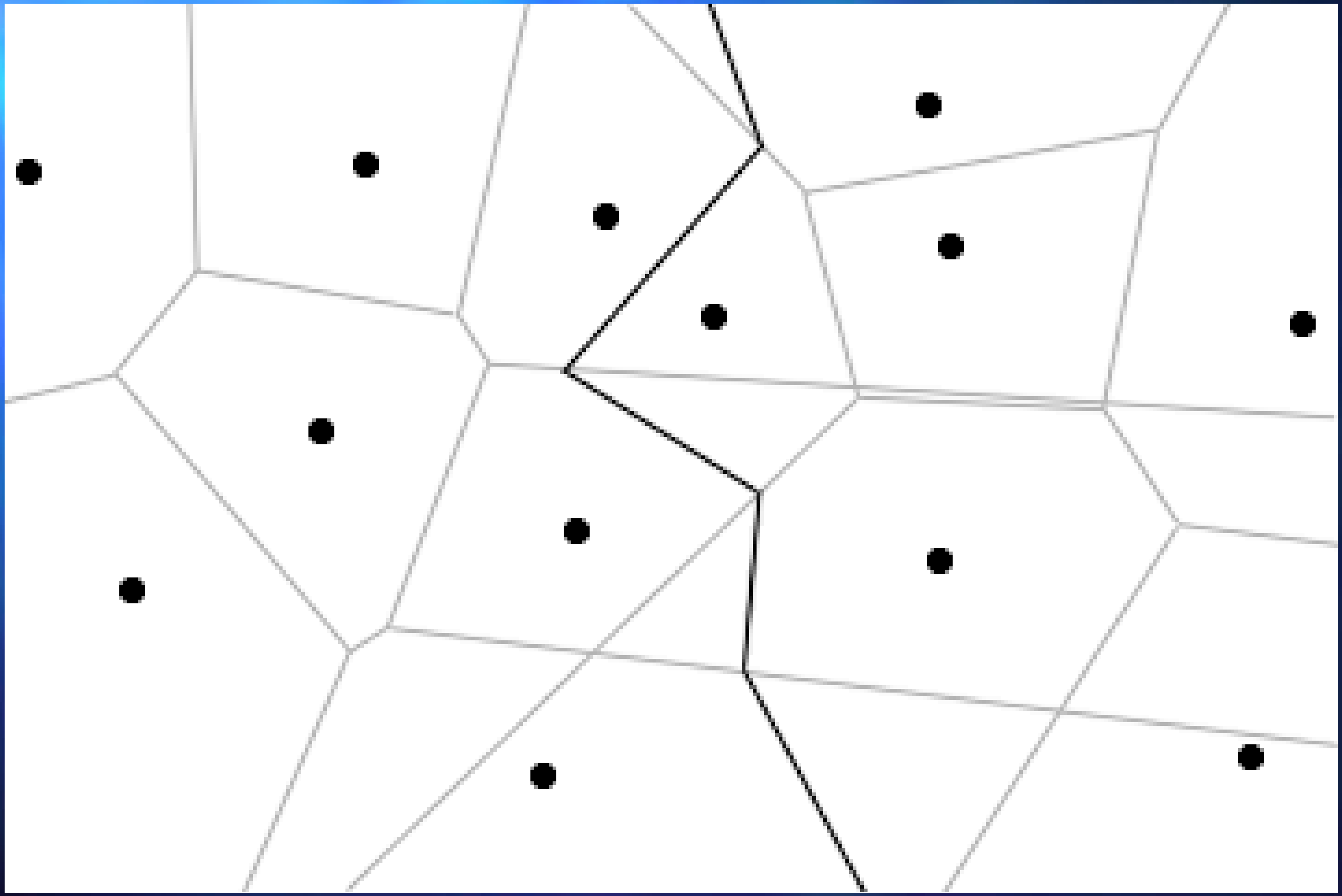
Dla wzrokowców



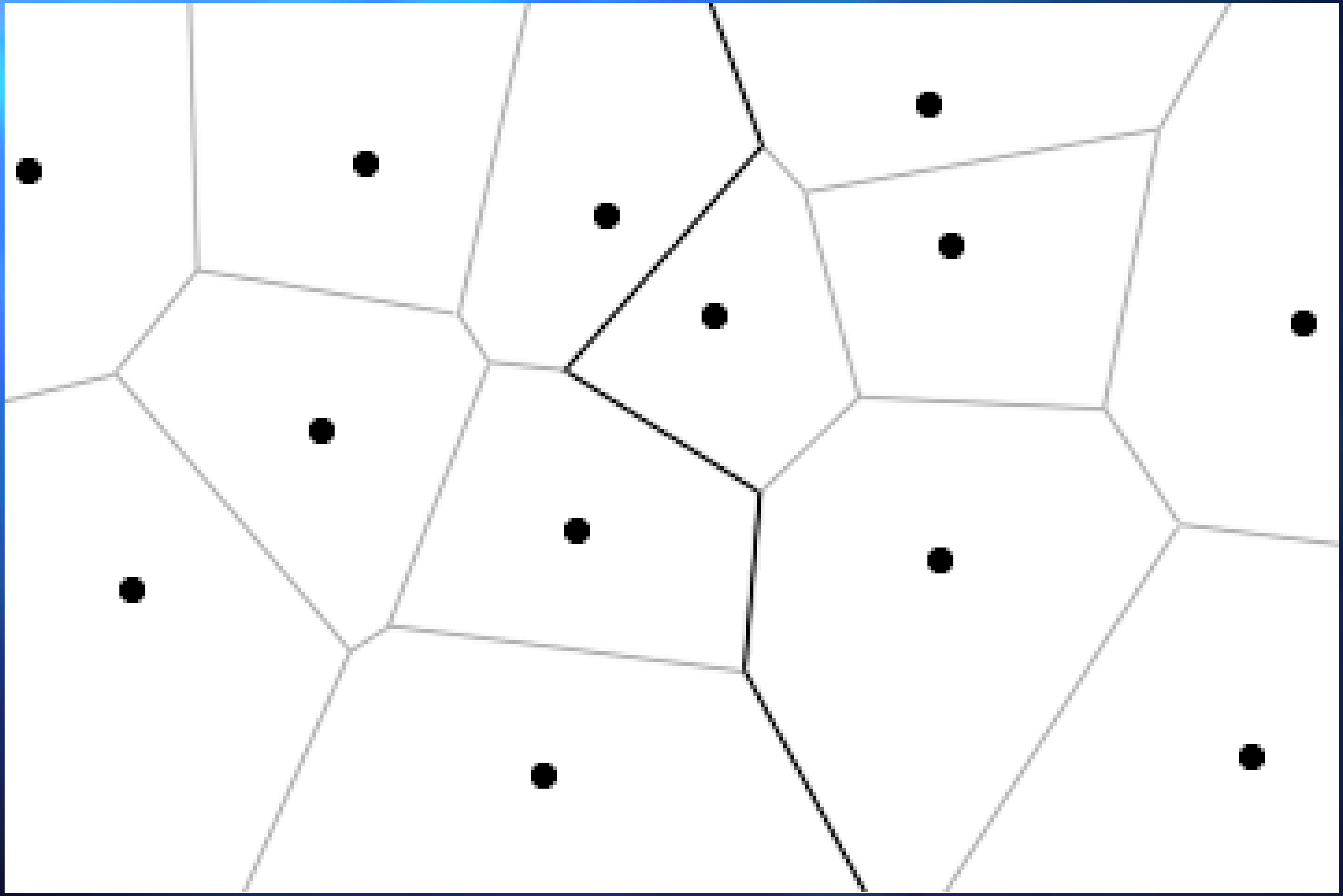
Dla wzrokowców



Dla wzrokowców



Dla wzrokowców



Tworzenie łańcucha dzielącego

- Krok I: Znalezienie półprostych.
- Każda z półprostych dzieli prostopadle na pół odcinki wspierające Conv(S_1) i Conv(S_2).
- Marsz od jednej półprostej do drugiej.
- Poszczególne "odcinki" łańcucha zaczynają się i kończą na krawędziach Vor(S_1) i Vor(S_2) patrz twierdzenie 1.

Tworzenie łańcucha dzielącego

- Niech będzie dana krawędź e (należący do ζ) i bieżący węzeł v. Znaleźć następną krawędź e' oraz węzeł v'.
- Niech e rozdziela V(i) oraz V(j) dla p_i należącego do S_1 oraz p_j należącego do S_2.
- Jak przeglądać brzegi Vor(S_1) i Vor(S_2)?

Tworzenie łańcucha dzielącego

- Niech $e_1, e_2, \ldots, e_k$ należy do ζ i V(i). Niech (b.s.o.) p_i należy do S_1.
- Niech $q_1, q_2, \ldots, q_k$ będą przecięciami między przedłużeniami krawędzi $e_1, e_2, \ldots, e_k$, a brzegiem V(i) z Vor(S_1).
- Obserwacja: $q_1, q_2, \ldots q_k$ jest uporządkowane na brzegu V(i) zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Złożoność asymptotyczna

- $T(N)=2T(N/2)+O(N)$
- Z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej:
- $N^{\log_2 2}=N$ zatem $N^{\log_2 2}=O(N)$
- $T(N)=O(N \lg N)$
- Jest to czas optymalny.
- Czy powinien nas ten wynik zdziwić?

Geometria Obliczeniowa

Część V: Rozwiązywanie problemów sąsiedztwa diagramem Voronoi

Wszyscy najbliższi sąsiedzi

- Problem ten można w czasie liniowym przekształcić w Diagram Voronoi, co oznacza możliwość rozwiązania go w czasie O(N lg N), który to czas jest optymalny.
- Twierdzenie 3.

Najbliższa para

- Problem najbliższej pary można przekształcić w czasie liniowym w problem wszystkich najbliższych sąsiadów, a zatem można go rozwiązać dzięki diagramowi Voronoi w czasie O(N lg N). Jest to czas optymalny.

Szukanie sąsiada

- Poszukiwanie najbliższego sąsiada może być wykonane w czasie O(lg N) przy użyciu pamięci O(N) i z czasem przetwarzania wstępnego O(N lg N), co stanowi rozwiązanie optymalne.

Metody przeszukiwania PGP: metoda warstw, metoda łańcuchowa, (1977) metoda separatora na płaszczyźnie, metoda doskonalenia triangulacji, metoda łańcuchowa z mostkowaniem i metoda trapezów

Triangulacja (Delaunay)

- Triangulacja charakteryzująca się tym, że okrąg na poszczególnych trójkątach jest pusty (twierdzenie 2 i 4), może być znaleziona w czasie O(N lg N) – jest to czas optymalny dla dowolnej triangulacji.
- EMST może być wyznaczone z triangulacji Delaunay.

Wypukła otoczka

- Jeśli dany jest diagram Voronoi N punktów na płaszczyźnie, otoczka wypukła może zostać znaleziona w czasie liniowym.

To jeszcze nie koniec!!!

- Istnieje jeszcze bardzo wiele problemów, które można rozwiązać za pomocą Diagramu Voronoi
- Diagram Voronoi posiada jeszcze bardzo wiele zaskakujących własności
- Istnieją diagramy Voronoi w wyższych wymiarach i wyższych rzędów

CDN.

Źródła

- Franco P. Preparata i Micheal Ian Shamos. *Geometria obliczeniowa. Wprowadzenie.* Helion 2003.